EJERCICIOS GEOMETRÍA AFÍN

BLOQUE I: SUBESPACIOS AFINES

(1) $r: P(-1,1,0),\ Q(-3,2,1)$ $\qquad s: F(1,0,-1)$ $\begin{cases} x+y=0 \\ 2y+z=0 \end{cases}$

$r: X = P + \lambda\overrightarrow{PQ}$ $\qquad \overrightarrow{PQ} = (-3,2,1)-(-1,1,0) = (-2,1,1)$

$\begin{cases} x = -1-2\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $\qquad s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ $\qquad \overrightarrow{PF} = (1,0,-1)-(-1,1,0) = (2,-1,-1)$

$\vec{v} = (-2,1,1),\ \vec{u} = (1,-1,2)$ no son proporcionales $\Rightarrow$ las rectas no son paralelas

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg = 2 \Rightarrow$ l.d $\Rightarrow$ las rectas se cortan

Ahora vamos a hallar la ecuación del plano que determinan, y para ello buscamos primero el punto donde se cortan

$r: \begin{cases} x+2z=-1 \\ y-z=1 \end{cases}$ $\qquad s: \begin{cases} x+y=0 \\ 2y+z=0 \end{cases}$

Primero vemos si alguno de los puntos de r (P, Q) cumple las ecuaciones de s, o si el punto F de s cumple las de r.

El punto F de s cumple las ecuaciones implícitas de r, por tanto el punto donde se cortan es $F(1,0,-1)$

Plano que determinan las rectas: $X = F + \lambda\vec{r} + \mu\vec{s} \rightarrow \begin{cases} x = 1-2\lambda+\mu \\ y = \lambda-\mu \\ z = -1+\lambda+2\mu \end{cases}$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & y \\ 1 & 2 & z+1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x-1 \\ -2 & 1 & y \\ 1 & 2 & z+1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x-1 \\ 0 & -1 & y+2(x-1) \\ 0 & 3 & z+1+x-1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x-1-(y+2x-2) \\ 0 & -1 & y+2x-2 \\ 0 & 0 & z+x+3(y+2x-2) \end{array}\right)$$

$z+x+3y+6x-6=0$

$7x+3y+z=6 \rightarrow$ Ecuación del plano que determinan las rectas r y s que se cortan

1) a) $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + \lambda(4, 3, 2)$

$(x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda(1, 3, 2)$

$\vec{v} = (4, 3, 2)$ y $\vec{u} = (1, 3, 2)$ no son proporcionales $\Rightarrow$ las rectas no son coincidentes ni paralelas

Vamos a calcular el rango del sistema de vectores $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{PQ})$

$\vec{PQ} = (0, 1, 0) - (-1, 2, 1) = (1, -1, -1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -9 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ $\rightarrow$ rango $= 3$, por tanto

los vectores son l.i. $\Rightarrow$ las dos rectas se cruzan

b) $\dfrac{x+4}{5} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-4}$ $\qquad$ $\dfrac{x+9}{-5} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-3}{2}$

Como $\vec{v} = (5, 2, -4)$ y $\vec{u} = (-5, 3, 2)$ no son proporcionales $\Rightarrow$ las rectas no son paralelas ni coincidentes

$\vec{PQ} = (-4, 1, -1) - (-9, 1, 3) = (5, 0, -4)$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 5 & 2 & -4 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $\rightarrow$ rango $= 2 \Rightarrow$ las rectas se cortan en un punto

c) $\begin{cases} 2x - 3y - z = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$

Resolvemos el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Como el sistema no tiene solución $\Rightarrow$ no se cortan, por lo que o se cruzan o son paralelas

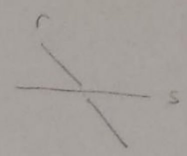
Pasamos al espacio vectorial para conseguir 2 vectores

$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

Glória Lobato

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z=\lambda} \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{1}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \vec{u} = (3, 1, 3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z=\lambda} \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad (-1, 1, 1)$$

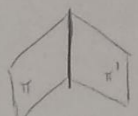


Como $\vec{v}$ y $\vec{u}$ son l.i $\Rightarrow$ las rectas se cruzan

③ a) $x + y - z = 1$ $\qquad 2x + 2y - 3z = 4$

No son planos coincidentes ni paralelos ya que sus ecuaciones no son proporcionales.

Por tanto, se cortan en una recta

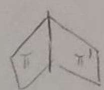


b) $(x, y, z) = \alpha(1, 1, -1) + \beta(0, 1, -2)$ $\qquad (x, y, z) = (0, 1, 0) + \alpha(0, 1, -1) + \beta(2, 3, 5)$

Estudiamos el rango de la matriz formada por dos vectores de cada plano

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \text{rango} = 3$$

Por tanto, los planos se cortan en una recta



④ $\Pi_1 : 2x + 2y - z = -1$ $\qquad \Pi_2 : x - y - 4z = -2$; $\quad \Pi_3 : 4y + 7z = 3$; $\quad \Pi_4 = 2x + 2y - z = 3$

Π_1 y Π_4 son paralelos

Resolvemos el sistema con Π_1, Π_2, Π_3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x - y - 4z = 2 \\ 4y + 7z = 3 \end{cases} \equiv r$$

Π_1, Π_2, Π_3 se cortan en la recta r

Gloria Labory

⑤ $\Pi_1 : \begin{cases} x+t=0 \\ y-z=1 \end{cases}$ $\qquad \Pi_2 = (0,0,1,-1) + L(\{(a,2,2,-4),(1,0,1,0)\})$

Vectores de $\Pi_1 \rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=\mu-1 \\ t=-\lambda \end{cases}$ $\qquad \vec{u}=(1,0,0,-1)$ $\quad \vec{v}=(0,1,1,0)$

Estudiamos el rango de la matriz dependiendo a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $a=4 \Rightarrow$ rango $=3 \Rightarrow$ Los planos se cruzan o se cortan en una recta

Si $a\neq 4 \Rightarrow rg=4 \Rightarrow$ Los planos se cortan en un punto

En el caso de que $a=4$, para ver si se cortan o se cruzan resolveremos el sistema formado por las ec. implícitas de Π_1 y Π_2

$\Pi_2: \; X = P + \lambda\vec{v} + \mu\vec{u} \rightarrow \begin{cases} x = 4\lambda + \mu \\ y = 2\lambda \\ z = 1+2\lambda+\mu \\ t = -1-4\lambda \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & y \\ 4 & 1 & x \\ 2 & 1 & z-1 \\ -4 & 0 & t+1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & y \\ 0 & 1 & x-2y \\ 0 & 1 & z-1-y \\ 0 & 0 & t+1+2y \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & y \\ 0 & 1 & x-2 \\ 0 & 0 & z-1-y-x+2y \\ 0 & 0 & t+1+2y \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} z-1+y-x=0 \\ t+1+2y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y-z=-1 \\ 2y+t=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+t=0 \\ y-z=1 \\ x-y-z=-1 \\ 2y+t=-1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \rightarrow$$ El sistema no tiene solución

Los dos planos se cruzan

Gloria Labory

⑥ $S_1: \begin{cases} x+y-z+t=0 \\ -x+y+2z+t=1 \end{cases}$ $\quad S_2: \begin{cases} -2x+z-t=1 \\ 2y+z+2t=1 \end{cases}$

· $\text{Dim } S_1 = 4 - rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 4-2 = 2$

· $\text{Dim } S_2 = 4 - rg\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4-2 = 2$

· $S_1 \cap S_2$ resolvemos el sistema formado por las 4 ec implícitas

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+y-z+t=0 \\ 2y+z+2t=1 \\ -2z-t=0 \end{cases} \xrightarrow{z=\lambda}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -1/2 + 1/2\,\lambda \\ y = 1/2 + 1/2\,\lambda \\ z = \lambda \\ t = -2\lambda \end{cases}$$

Como se corta en una recta $\Rightarrow \dim S_1 \cap S_2 = 1$

$\text{Dim } S_1 + S_2 = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2 = 2+2-1 = 3$

Ec. paramétricas de $S_1 \cap S_2$: $X = \underbrace{P + \lambda\vec{v_1}}_{\text{recta dada en teoría}} + \underbrace{\mu\vec{v_2}}_{\vec{S_1}} + \underbrace{\delta\vec{v_3}}_{\vec{S_2}}$

Para conseguir $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$ transformamos los espacios afines S_1 y S_2 en espacios vectoriales $\vec{S_1}$, $\vec{S_2}$

$\vec{S_1} \begin{cases} x+y-z+t=0 \\ -x+y+2z+t=0 \end{cases}$ $\quad \vec{v_1} = (0, 1, 0, -1)$

$P = (3, 2, 2, -4)$

$\vec{S_2} \begin{cases} -2x+z-t=0 \\ 2y+z+2t=0 \end{cases}$ $\quad \vec{v_2} = (-1, 4, -4, -2)$

$S_1 \cap S_2 \begin{cases} x = 3 - \mu \\ y = 2 + \lambda + 4\mu \\ z = 2 - 4\mu \\ t = -4 - \lambda - 2\mu \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & x-3 \\ 1 & 4 & y-2 \\ 0 & -4 & z-2 \\ -1 & -2 & t+4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & y-2 \\ 0 & -1 & x-3 \\ 0 & -4 & z-2 \\ 0 & 2 & t+4+y-2 \end{array}\right)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y-2+4x-12 \\ 0 & -1 & x-3 \\ 0 & 0 & z-2-4x+12 \\ 0 & 0 & t+4+y+2x-6 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} z-2-4x+12=0 \\ t+4+y+2x-6=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x-z=10 \\ 2x+y+t=2 \end{cases}$$

Ec. implícitas de $S_1 \cap S_2$

Gloria Lobo

⑦

$$M: \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \lambda + \mu \\ z = -1 + \lambda + \mu \\ t = -\lambda \end{cases} \qquad N: \begin{cases} x - 2y - 2z + t = 4 \\ x - 2z - t = -2 \\ x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

6

a) $\dim M = rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$

$\dim N = 4 - rg \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$

· Base de $\vec{M} = \{(1,-1,1,-1), (1,1,1,0)\}$

· Base de $\vec{N}$: paso a paramétricas resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[t=\mu]{z=\lambda} \begin{cases} x = 2\lambda + \mu \\ y = \mu \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases}$$

$B_{\vec{N}} = \{(2,0,1,0), (1,1,0,1)\}$

b) Calculamos el rango de la matriz formada por los 4 vectores de las bases de $\vec{N}$ y $\vec{M}$:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow rg = 3 \Longrightarrow \vec{M} \text{ y } \vec{N} \text{ se cortan en una recta}$$

Como $\vec{M}$ y $\vec{N}$ se cortan en una recta $\Rightarrow$ en el espacio afín M y N se pueden cruzar o cortar en una recta. Para saberlo resolvemos el sistema

$$M: \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y-1 \\ 1 & 1 & z+1 \\ -1 & 0 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & y-1+x \\ 0 & 0 & z+1-x \\ 0 & 1 & t+x \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & t+x \\ 0 & 0 & z+1-x \\ 0 & 0 & y-1+x-2t-2x \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x - z = 1 \\ x - y + 2t = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y - 2z + t = 4 \\ x - 2z - t = -2 \\ x - y - 2z = 1 \\ x - z = 1 \\ x - y + 2t = -1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Gloria Labory

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sist. no tiene solución $\Longrightarrow$ M y N se cruzan

8) $S: \begin{cases} x - y + z - 2t = 1 \\ y + z = 2 \\ x + 2z - 2t = 3 \end{cases}$ $\qquad T \rightarrow L\{(1,0,0,0), (0,-1,1,1), (2,0,0,1)\}$

a) $\dim S = 4 - rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 4 - rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4-2 = 2$

$\dim T = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$

$$S \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$\xrightarrow[t=\mu]{z=\lambda} \begin{cases} x = -2\lambda + 2\mu + 3 \\ y = -\lambda + 2 \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases}$ $\qquad$ Ec. paramétricas de S

b) Vamos a calcular el rango de la matriz formada por los vectores de S y T

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow rg = 2$$

Para ver si son paralelos o coincidentes estudiamos $S \cap T$

$T \begin{cases} x = \lambda + 2\delta \\ y = -\mu \\ z = \mu \\ t = \mu + \delta \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & -1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 1 & t \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & -1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & z+y \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \rightarrow \{ z + y = 0$

Gloria Lobr

$$S\cap T \to \begin{cases} y+z=0 \\ x-y+z-2t=1 \\ y+z=2 \\ x+2z-2t=1 \end{cases} \Longrightarrow$$ Como $y+z=0$ y $y+z=2$ no se puede cumplir simultáneamente $\Longrightarrow S\cap T=\emptyset$

Por tanto S y T son paralelas

9 $S: \begin{cases} x+t=0 \\ y-z=1 \end{cases}$ $\quad T: P=(1,0,0,0)\quad \vec{w}=(1,1,1,-1)$

Me piden dim $S+T$, para ello necesito saber si $S\cap T=\emptyset$ o $S\cap T\neq\emptyset$

Por lo que miro la posición relativa de S y T. También necesito dim S y dim T

$$S \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{cases} x=-\mu \\ y=\lambda+1 \\ z=\lambda \\ t=\mu \end{cases} \qquad \text{Dim } S=2$$

$$T \quad X=P+\lambda\vec{w} \to \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \\ t=-\lambda \end{cases} \qquad \text{Dim } T=1$$

$$T \quad \left(\begin{array}{c|c} 1 & x-1 \\ 1 & y \\ 1 & z \\ -1 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|c} 1 & x-1 \\ 0 & y-x+1 \\ 0 & z-x+1 \\ 0 & t+x-1 \end{array}\right) \to \begin{cases} x-y=1 \\ x-z=1 \\ x+t=1 \end{cases}$$

Ec. implícitas de $S\cap T$ $\begin{cases} x-y=1 \\ x-z=1 \\ x+t=1 \\ x+t=0 \\ y-z=1 \end{cases} \Longrightarrow$ Como $x+t=1$ y $x+t=0$ no se pueden dar simultáneamente $\Rightarrow$ el sistema no tiene solución $\Rightarrow$ Son paralelos $\Rightarrow S\cap T=\emptyset$

$$\text{Dim } S+T = \dim S + \dim T - \dim S\cap T = 2+1-0 = 3$$

$$\vec{v}_3 = \vec{PQ} = (0,1,0,0)-(1,0,0,0)=(-1,1,0,0)$$

$$S+T \quad X = Q+\lambda\vec{v}_1+\mu\vec{v}_2+\gamma\vec{v}_3$$

$$\begin{cases} x=-\mu-\gamma \\ y=1+\lambda+\gamma \\ z=\lambda \\ t=\mu \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y-1 \\ 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 1 & 0 & 1 & y-1 \\ 0 & -1 & -1 & x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & y-1-z \\ 0 & -1 & -1 & x \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & y-1-z \\ 0 & 0 & 0 & x+t+y-1-z \end{array}\right) \to \{x+y-z+t=1$$

Gloria Labory